Dimostrazione dell'inverso del Teorema di Pitagora

Teorema di Pitagora

In un triangolo rettangolo (ipotesi). la somma dei quadrati costruiti sui cateti è equivalente al quadrato costruito sull'ipotenusa, cioè $a^2+b^2=c^2$ (tesi).

L'inverso del Teorema di Pitagora

Se la somma dei quadrati costruiti sui cateti è equivalente al quadrato costruito sull'ipotenusa, cioè $a^2+b^2=c^2$ (ipotesi) allora il triangolo è rettangolo in γ (tesi)

Dimostrazione

Per il teorema del coseno dei triangoli qualsiasi

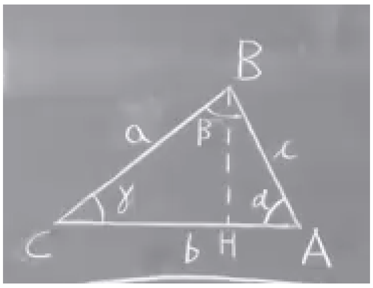
$c^2 = a^2+b^2 -2ab(\cos\gamma)$

ma il $\cos\gamma$ è = 0 quando $\gamma = 90°$ c.v.d.

Per i triangoli qualsiasi

- **teorema del coseno (T. di Carnot)**: il quadrato di un lato è uguale alla somma dei quadrati degli altri due diminuita del loro doppio prodotto moltiplicato per il coseno dell'angolo opposto al primo lato (utilizzo: dati due lati e l'angolo fra essi compreso); $c^2=a^2+b^2-2ab(\cos\gamma)$

D



Primo caso $\gamma<\pi/2$

Si traccia l'altezza che insiste sul lato CA.

$BH=a\sin\gamma$

$CH=a\cos\gamma$

$HA=|b-a\cos\gamma|$

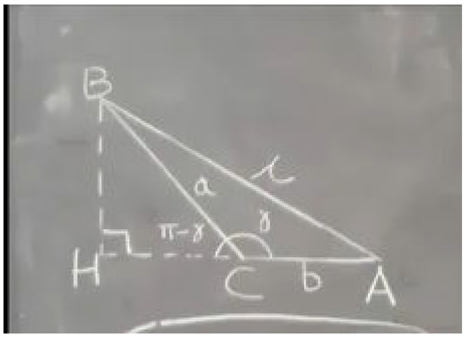
$c^2=AH^2+BH^2$

$c^2=(b-a\cos\gamma)^2+a^2\sin^2\gamma$

$c^2=b^2+a^2\cos\gamma-2ab\cos\gamma+a^2\sin^2\gamma$

$c^2=b^2+a^2(\cos^2\gamma+\sin^2\gamma)-2ab\cos\gamma$

$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos\gamma$



Secondo caso $\gamma > \pi/2$

Si traccia l’altezza che insiste sul prolungamento del lato CA.

$\sin\gamma = \sin(\pi - \gamma)$

$BH = a \sin\gamma$

$CH = a\cos\gamma$

$HA = b - a\cos\gamma$

$c^2 = AH^2 + BH^2$

$c^2 = (b - a\cos\gamma)^2 + a^2 \sin^2\gamma$

$c^2 = b^2 + a^2\cos^2\gamma - 2ab\cos\gamma + a^2\sin^2\gamma$

$c^2 = b^2 + a^2(\cos^2\gamma + \sin^2\gamma) - 2ab\cos\gamma$

$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos\gamma$